



JARDÍN BOTÁNICO ATLÁNTICO DE GIJÓN XXI Olimpiada Matemática Asturiana

Un paseo por el Jardín Botánico... ... con ojos matemáticos

1. La Geometría del hombre...

Antes de entrar en el recinto del Jardín Botánico echa una ojeada a tu alrededor. Estas rodeado de creaciones humanas, de objetos artificiales. La huella del hombre es clara. Son objetos en los que prevalecen las rectas, las líneas perpendiculares, los ángulos rectos, los polígonos regulares más simples, curvas fácilmente identificables con las cónicas... Y si pensamos en los objetos espaciales veremos planos, casi siempre perpendiculares entre sí o superficies no demasiado complicadas: superficies regladas, superficies de revolución: cilindros, conos, esferas, paraboloides...

Es la Geometría simplificada del ser humano: la Geometría de Euclides.

En algunos objetos artificiales, incluso cuando se ha intentado imitar a la Naturaleza, el resultado aparece demasiado regular.



Cuando se trata de rellenar el plano con baldosas iguales, ya sabes que sólo hay tres polígonos regulares, lados iguales y ángulos iguales, que nos permiten rellenar el plano. Ten cuidado por donde pisas e intenta encontrar a lo largo del recorrido mosaicos regulares. Aquí tienes una muestra, que la vista no te engañe...



En los útiles que aparecen en las distintas exposiciones los cuerpos regulares de caras planas o curvas van a salir a tu encuentro. Además de cubos y prismas rectos encontrarás pirámides, cilindros, conos...



Pero el ser humano también aprende de la Naturaleza y de vez en cuando la imita y aprovecha sus formas en su beneficio. Observa los sumideros de agua, ¿no te recuerdan la distribución de las semillas en algunas plantas o de los pétalos de algunas flores...?



Aunque las plantas lo hacen mejor...

Aprovechamos determinadas propiedades físicas de algunas superficies para optimizar nuestros recursos. Fíjate en los focos de las torres de la primera parte del recorrido. Observa la forma de la superficie en la que se refleja la luz de la lámpara... Nos recuerda a una antena parabólica

2. ...la Geometría de la Naturaleza

"Las nubes no son esferas, las montañas no son conos, las costas no son círculos, las cortezas de los árboles no son lisas y los relámpagos no se desplazan en línea recta"

Benoît Mandelbrot

Es la misma Naturaleza, y no el matemático, quine introduce las matemáticas en la filosofía natural

I. Kant

¿Qué altura puede alcanzar un árbol?

Euler en 1778 ya respondió a esta pregunta demostrando en su obra "*De altitudinem columnarium...*" que un árbol no puede crecer indefinidamente ya que, como la espiga de trigo acabaría doblándose sobre su propio peso si se desvía un poco de la perpendicular. Galileo ya había sugerido los 90 metros como altura máxima.

Greenhill demostró que el diámetro de un cuerpo homogéneo y alto debe aumentar con la potencia $3/2$ de su altura.



Porque la naturaleza sabe de... **máximos y mínimos; de ahorro, eficacia, economía y optimización.** Por eso, el mundo vegetal tiene sus propias leyes físicas, que condicionan el crecimiento y las formas de sus elementos, que responden siempre a principios de optimización, economía de medios e interacción con el medio exterior.

En un mundo perfectamente aislado, en un fluido homogéneo, un ser vivo adoptaría la forma de una esfera o de un círculo, el ideal

platónico, la forma perfecta:

- La máxima superficie con el mismo perímetro
- El máximo volumen con la misma superficie

¡La forma más democrática e igualitaria! La esfera protege y minimiza los riesgos de agresiones externas. De hecho muchas semillas tienen forma esférica; las hojas de las plantas acuáticas tienden a la forma circular.

Pero en un mundo hostil todo ser vivo necesita competir con otros individuos, luchar por el espacio o el alimento o la luz... y defenderse de las agresiones externas. A las formas circulares les salen ángulos. Los ángulos disuaden de los ataques externos, concentran las fuerzas y la posibilidad de penetración y conquistan



espacios. Las hojas se irán alejando de sus formas redondas para acabar convertidas en agujas en los casos extremos.



Y si trata de rellenar espacios con el mínimo de huecos, las semillas nos darán una lección de empaquetamiento óptimo, curvándose en espirales y cerrando el círculo...

Si por el contrario hay que maximizar la superficie para intercambiar gases con la atmósfera, o absorber el máximo de luz, la ramificación fractal vendrá en ayuda de la planta.

Si hay que lanzar avanzadillas para conquistar nuevos terrenos o agarrarse a algo para subir más alto, las hélices se incrustarán en las claves genéticas de los vencedores para generaciones posteriores...

En el fabuloso universo vivo del Jardín Botánico nos vamos a encontrar un poema de formas que pueden interpretarse a la luz de las matemáticas y de las leyes físicas, pues todo fenómeno natural, y el crecimiento de las plantas lo es, por sencillo que parezca es en realidad compuesto; y todo efecto visible es la suma de incontables acciones subordinadas. Y las matemáticas manifiestan en este terreno su poder de combinar, relaciones y generalizar. El crecimiento y las formas de los seres vivos participan de esta naturaleza compuesta y por tanto las matemáticas pueden aplicarse a ellos revelando la potencia de sus métodos.



Los códigos genéticos de las plantas también se basan en el *principio de mínima acción*, es decir, buscarán la mayor economía a la hora de generar instrucciones de crecimiento. La simetría, axial, central o de giro y la autosemejanza en las distintas etapas de desarrollo de la planta van a abundar en el entorno vegetal. La iteración de instrucciones simples van a hacer a muchos ejemplares de plantas parecerse a estructuras fractales



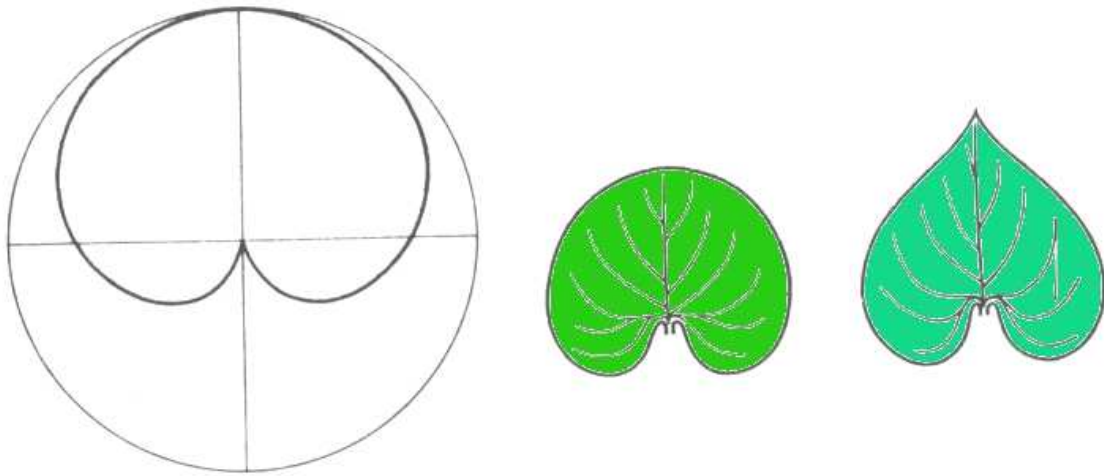
Helecho natural



Helecho de Barnsley, generado por ordenador

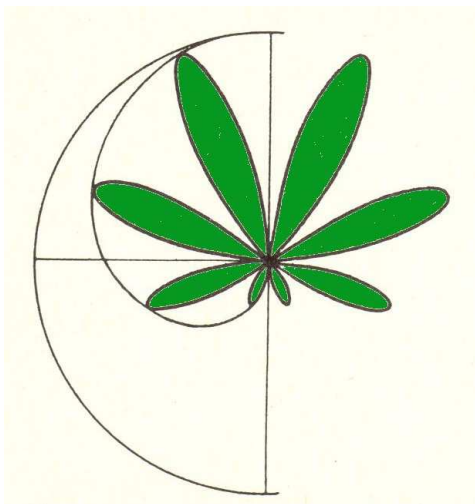
Más regularidades de lo que parece...

Las hojas de las plantas suelen crecer en torno a un “nodo” o punto de crecimiento nulo o mínimo. Si no fuera así su forma se aproximaría a un círculo. Observa estas tres figuras:



La primera es una curva reniforme (con forma de riñón), en el interior de una circunferencia. Los matemáticos la identifican mediante una ecuación $\rho = a \cdot \sin \frac{\theta}{2}$ que estudiarás en bachillerato.

Las otras dos son las siluetas de hojas de violetas. Se parecen ¿verdad?



Incluso cuando la hoja es compuesta se aproxima bastante a una curva de carácter matemático, en este caso a una cuya fórmula es $\rho = \sin \frac{\theta}{2} \cdot \sin n\theta$

3. Las curvas botánicas

En apariencia las hojas de las plantas y los pétalos de las flores están hermanados con la poesía y muy alejados de las matemáticas. Sin embargo también podemos acercarnos a los misterios del crecimiento vegetal a través de curvas y de ecuaciones, y además no demasiado complejas.

Existe una familia de curvas, investigada en el siglo XVIII, que parece haber nacido para identificarse con algunas de las flores que podrás encontrar esta primavera en el Jardín Botánico y en tus excursiones por el campo.

Se trata de la **CONCOIDE DE ROSETÓN**, también conocida como **PÉTALO GEOMÉTRICO** o **ROSETÓN DE TROYA**

Para interpretar el crecimiento de hojas y flores las coordenadas rectangulares o cartesianas no son las más apropiadas. Recurriremos a las coordenadas polares, en las que las dos variables son el ángulo girado respecto a la horizontal y la distancia al origen.

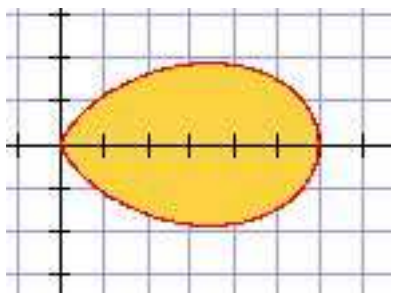
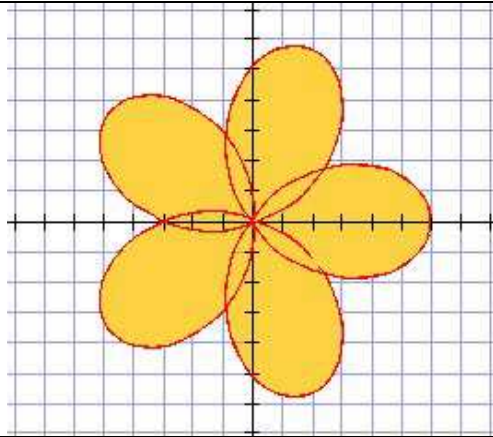
En estas coordenadas, todas las concoides de rosetón o de rosáceas, como dicen los franceses, tiene esta ecuación general

$$\rho = a \cos n\theta + b$$

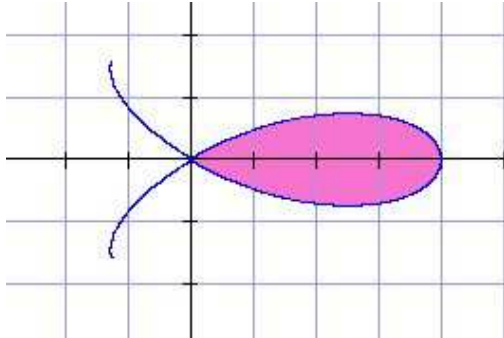
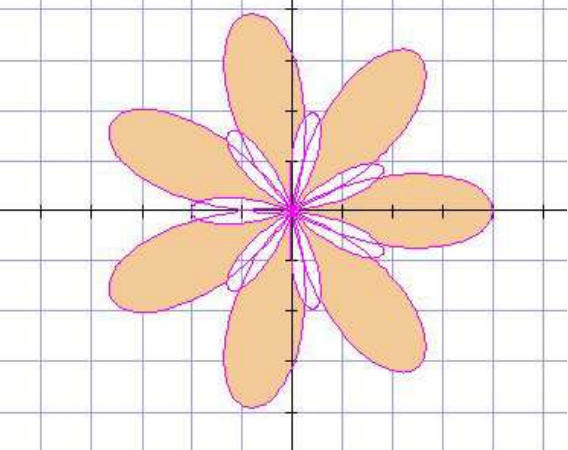
Donde ρ representa la distancia del origen a un punto del borde del pétalo, θ es el ángulo girado respecto a la horizontal y a , b y n son tres números que identifican a cada curva.

Aquí tienes dos ejemplos

Caso $a = b = 3$ y $n = 5/2$

Ejemplo1: Pétalo simple: Caso $a = b$ $n = 5/2$	Ecuación $\rho = 3 \cos \frac{5}{2} \theta + 3$
	
$-\frac{\pi}{2.5} < \theta < \frac{\pi}{2.5}$	Si hacemos variar $-4\pi < \theta < 4\pi$ obtenemos la flor completa

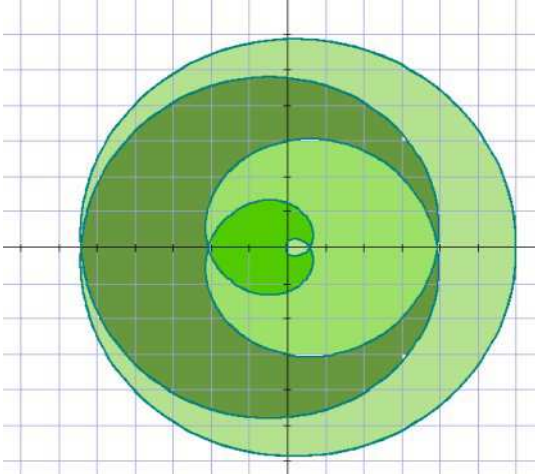
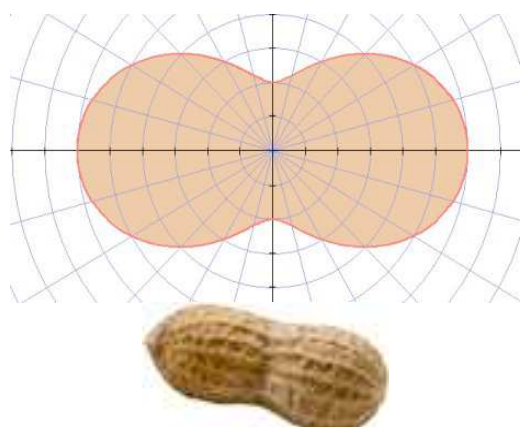
Caso $0 < b < a$. $a = 3, b = 1, n = 7/2$

Ejemplo1: Pétalo simple: Caso $0 < b < a$ $n = 7/2$	Ecuación $\rho = 3\cos\frac{7}{2}\theta + 1$
	
$-\frac{\pi}{3.5} < \theta < \frac{\pi}{3.5}$	Si hacemos variar $-2\pi < \theta < 2\pi$ obtenemos la flor completa

Se puede observar que el factor **b** alarga el pétalo mientras que **n** hace aumentar el número de pétalos en cada circunferencia.

Y hasta los cacahuets tienen fórmula matemática

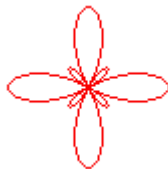
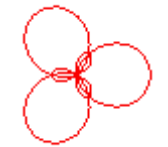
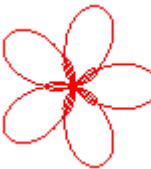
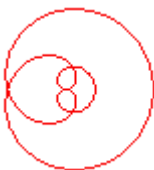
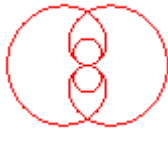
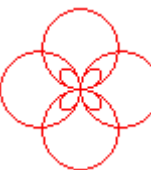
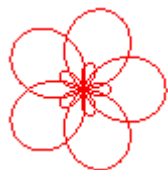
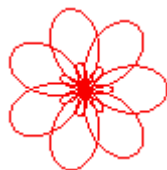
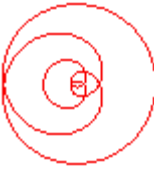
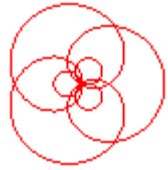
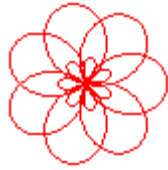
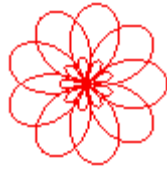
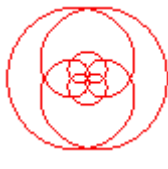
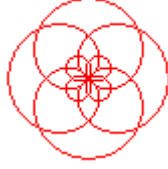
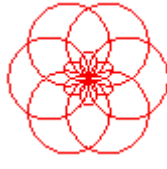
¿Qué ocurre si **n** es menor que la unidad?... Nenúfares y cacahuets, hermanos matemáticos

Caso $b = a = 3, n = 1/5$ Ecuación $\rho = 3\cos\frac{1}{5}\theta + 3$	Caso $b > a$ $a = 2, b = 4,$ Ecuación $\rho = 2\cos\frac{1}{2}\theta + 4$ Cacahuete
	

En la tabla de abajo tienes unas cuantas estructuras para los distintos valores de a , b y n . Intenta encontrar en tu paseo distintas hojas o flores que se parezcan a cada una de las curvas de las celdas.

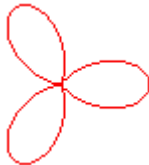
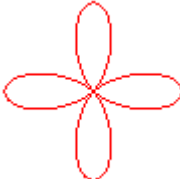
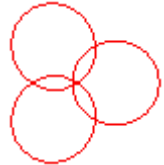
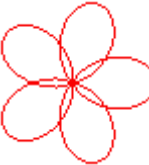
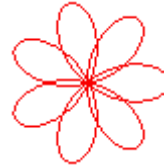
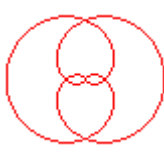
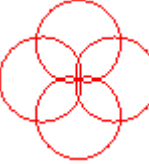
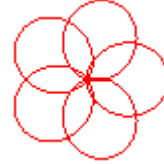
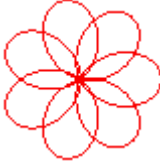
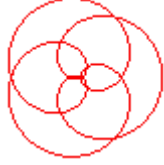
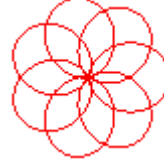
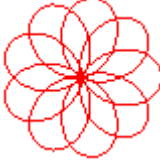
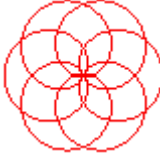
$$\rho = a \cos n\theta + b$$

Caso $0 < b < a$

 $n = 1$: caracol de Pascal	 $n = 2$: trisectriz de Ceva	 $n = 3$	 $n = 4$	 $n = 5$
 $n = 1/2$: nefroide de Freeth	 $n = 3/2$	 $n = 5/2$	 $n = 7/2$	 $n = 9/2$
 $n = 1/3$	 $n = 2/3$	 $n = 4/3$	 $n = 5/3$	 $n = 7/3$
 $n = 1/4$	 $n = 3/4$	 $n = 5/4$	 $n = 7/4$	 $n = 9/4$
 $n = 1/5$	 $n = 2/5$	 $n = 3/5$	 $n = 4/5$	 $n = 6/5$

$$\rho = a \cos n\theta + b$$

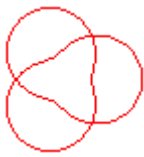
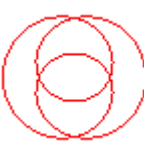
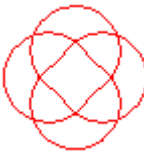
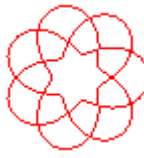
Caso $b = a$

				
$n = 1$: cardioide	$n = 2$: doble huevo	$n = 3$	$n = 4$	$n = 5$
				
$n = 1/2$	$n = 3/2$	$n = 5/2$	$n = 7/2$	$n = 9/2$
				
$n = 1/3$	$n = 2/3$	$n = 4/3$	$n = 5/3$	$n = 7/3$
				
$n = 1/4$	$n = 3/4$	$n = 5/4$	$n = 7/4$	$n = 9/4$
				
$n = 1/5$	$n = 2/5$	$n = 3/5$	$n = 4/5$	$n = 6/5$

$$\rho = a \cos n\theta + b$$

Caso $b > a$

				
$n = 1$	$n = 2$: cacahuete	$n = 3$	$n = 4$	$n = 5$ estrella de mar

 $n = 1/2$	 $n = 3/2$	 $n = 5/2$	 $n = 7/2$	 $n = 9/2$
 $n = 1/3$	 $n = 2/3$	 $n = 4/3$	 $n = 5/3$	 $n = 7/3$
 $n = 1/4$	 $n = 3/4$	 $n = 5/4$	 $n = 7/4$	 $n = 9/4$
 $n = 1/5$	 $n = 2/5$	 $n = 3/5$	 $n = 4/5$	 $n = 6/5$

Antonio Pérez Sanz

Bibliografía:

D'Arcy Thompson. *Sobre el Crecimiento y la Forma*. Blume Ediciones. Madrid 1980
 Courant y Robbins. *¿Qué son las Matemáticas?* Fondo de Cultura Económica. México. 2002
 Hildebrandt y Tromba. *Matemáticas y Formas Óptimas*. Prensa científica. Barcelona. 1990
 Ghyka M. *Estética de las proporciones en la Naturaleza y en las Artes*. Poseidon. Barcelona. 1983.
 Pérez Sanz, A. *Más por menos*. Espasa. Madrid 2011
 Álvarez Pérez, J.M. *Curvas en la historia 1 y 2*. Nivola. Madrid 2006
<http://www.mathcurve.com>

Fotografías: Antonio Pérez Sanz